Лекция 12_Линза-Тиринг мәселесі жағдайында орбитаның векторлық элементтеріне қатысты орнықтылығы

Бұл дәріс ЖСТ дағы Линза-Тирринг есебі контекстінде орбитаның векторлық элементтеріне қатысты және орбиталық орнықтылық тақырыбына арналған. Бұл мәселе гравитациялық физика шеңберінде іргелі болып табылады және планеталар мен жұлдыздар сияқты үлкен денелердің маңындағы ауыр заттардың қозғалысын түсіну үшін маңызды. Альберт Эйнштейннің ЖСТ біздің гравитация және кеңістік-уақыт туралы түсінігімізде төңкеріс жасады. Бұл теория нысандардың гравитация әсерінен қалай қозғалатынын ғана емес, сонымен қатар гравитацияның кеңістік пен уақытты қалай қисайтатынын сипаттайды. «Линза-Тирринг» мәселесі ЖСТ контекстінде айналмалы қара құрдымдар немесе нейтрондық жұлдыздар сияқты массивтік денелердің айналасындағы орбиталарды зерттейді.

Бүгін біз орбиталық орнықтылықтың, яғни орбиталар қалай орнықты болуы мүмкін және олардың орнықтылығына қандай факторлар әсер етеді деген сияқты негізгі аспектілерін қарастырамыз. Біз сондай-ақ орбиталық параметрлердегі өзгерістер объектінің ұзақ мерзімді қозғалысына қалай әсер ететінін түсінуге мүмкіндік беретін векторлық орбиталық элементтерге қатысты тұрақтылықты қарастырамыз.

Дәріс барысында біз Линз-Тирринг есебінің математикалық және физикалық аспектілерін қарастырамыз және сіз ғалымдардың орбиталарды қалай талдайтынын және айналмалы денелердің күшті гравитациялық өрісіндегі заттардың қозғалысы туралы болжам жасайтынын білесіз. Біз сондай-ақ осы тұжырымдамалардың практикалық қолданылуын және олардың астрономия мен ғарышты зерттеудегі заманауи зерттеулерге қалай қатысты екенін талқылаймыз.

Сонымен, біз айналатын сұйық шар үшін Фоктың бірінші жуықтауының нақтыланған метрикасынан бастаймыз

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U\left(1 + \frac{\xi_0}{m_0 c^2}\right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma}{7 m_0 c^2}\left(\vec{S}_0 \vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0 \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\right]dt^2 -$$

$$-\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)d\vec{r}^{\,2} + \frac{8}{c^2}\left(\vec{U} d\vec{r}\right)dt, \qquad (1)$$

Бұл метрика көбіне Лензе-Тирринг мәселесін қарастыру кезінде қолданылатын ұқсас кейбір метрикаларға қарағанда кемшіліктері аз деп айтуға болады [2]. Басқа ұқсас бірінші жуықтау метрикаларынан айырмашылығы, (1) метрика Шварцшильд есебін дұрыс сипаттайды және сонымен қатар Линза-Тирринг есебін зерттеу кезінде маңызды болып табылатын сызықтық емес $\vec{S}_0$ мүшені ескереді. Естеріңізге сала кетейік

$$\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)=-\frac{S_0^2}{r^3}+\frac{3\left(\vec{r}\vec{S}_0\right)^2}{r^5} \tag{2}$$

Ленце-Тирринг есебінің Гамильтонианын былай жазуға болады

$$H=mc^2+\frac{P^2}{2m}-mU-\frac{1}{c^2}\left(\frac{P^4}{8m^3}+\frac{3P^2U}{2m}+\frac{\xi_0}{m_0}mU-\frac{1}{2}mU^2\right)-$$

$$-\frac{2\gamma}{c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{P}\right)-\frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\right), \tag{3}$$

Мұндағы $\vec{P}=\dfrac{\partial L}{\partial \vec{V}}$ - сынақ денесінің импульсе, L - Лагранж функциясы. Ал, қозғалыс теңдеулері мынадай болады:

$$\dot{\vec{M}}=\frac{2\gamma}{c^2r^3}\left[\vec{S}_0\vec{M}\right]-\frac{12\gamma m}{7m_0c^2r^5}\left(\vec{S}_0\vec{r}\right)\left[\vec{r}\vec{S}_0\right], \tag{4}$$

$$\dot{\vec{A}}=\left(4E+6mU+\frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{\left[\vec{\nabla}U\cdot\vec{M}\right]}{mc^2}+\frac{2\gamma}{c^2r^3}\left[\vec{S}_0\vec{A}\right]+\frac{6\gamma\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)}{mc^2r^5}\left[\vec{r}\vec{M}\right]-$$

$$-\frac{6\gamma}{7m_0c^2r^5}\left\{S_0^2\left[\vec{r}\vec{M}\right]-\frac{5}{r^2}\left(\vec{S}_0\vec{r}\right)^2\left[\vec{r}\vec{M}\right]-2\left(\vec{S}_0\vec{r}\right)\left[\vec{S}_0\vec{M}\right]+2\left(\vec{S}_0\vec{r}\right)\left[\vec{P}\left[\vec{r}\vec{S}_0\right]\right]\right\}, \tag{5}$$

мұндағы $\vec{M}$ және $\vec{A}$ - орбиталардың векторлық элементтері. Бұдан векторлар уақыт өте баяу өзгеріп, эволюциялық және периодтық түрдегі екі қозғалысқа қатысатыны белгілі болады. Шынында да, біз (4) және (5) сызықты емес механиканың асимптотикалық әдісі болып табылатын орташалау әдісіне (T – Ньютондық период бойынша) қолданамыз. Сонда асимптотикалық әдістің бірінші жуықтауының дифференциалдық теңдеулері (эволюциялық қозғалыс теңдеулері) мынадай түрге келеді.

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=\left[\vec{\Omega}\vec{M}\right],\quad \frac{d\vec{A}}{dt}=\left[\vec{\Omega}\vec{A}\right], \tag{6}$$

мұндағы

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}} = \frac{3m\alpha^4}{M^3 M_0^3 c^2}\vec{M} + \frac{m^2\alpha^4}{m_0 M^3 M_0^3 c^2}\left\{2\vec{S}_0 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)}{7m_0 M^2}\vec{S}_0 + \frac{6m(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0 M^4}\vec{M}\right\} -$$

$$-\frac{3m^2\alpha^4\vec{M}}{m_0 M^5 M_0^3 c^2}\left\{2(\vec{M}\vec{S}_0) + \frac{m}{7m_0}S_0^2 - \frac{3m}{7m_0 M^2}(\vec{S}_0\vec{M})^2\right\}, \tag{7}$$

мұндағы $M_0 = \dfrac{M}{\sqrt{1 - \dfrac{A^2}{\alpha^2}}}$ - жүйенің инвариант. Ал, Гамильтонианы

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0^2} - \frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{\alpha^2}{M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3 M} +\right.$$

$$\left. + \frac{m^2\alpha^4}{m_0 M_0^3 M^3}\left[2\left(\vec{S}_0\vec{M}\right) + \frac{mS_0^2}{7m_0} - \frac{3m}{7m_0 M^2}\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)\right]\right\}. \tag{8}$$

Енді M және A элементтерге қатысты орнықтылық мәселесін қарастырайық немесе басқаша айтқанда, бізді $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлық элементтердің абсолютті мәндеріне қатысты орнықтылық мәселесі қызықтырады. Қозғалыстың интегралдары қозғалыстың (6) түрдегі эволюциялық теңдеулерінен шығады

$$M = \mathrm{const}, \quad A = \mathrm{const}. \tag{9}$$

Осы жерден сынақ денесінің эволюциялық қозғалысы элементтерге M және A ($\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлардың абсолютті мәндеріне) қатысты орнықты екені анық.

Екінші жағынан, (9) өрнегінен сынақ денесінің айналмалы орталық дене өрісіндегі қозғалысының орбиталық орнықтылығын береді. Шынында да, сынақ денесінің қозғалысының орбиталық орнықтылығы деп біз тербелмелі эллипстің уақыттың бастапқы моменті үшін анықталған ұйытқымаған Кеплер эллипсінің пішіні мен өлшемдеріне жақын пішіні мен өлшемдерін уақыттың кез келген сәтінде сақтау қасиетін түсінеміз. Эллипстің пішіні мен өлшемдері e эксцентриситеттің шамасымен және $2a$ фокальды осінің ұзындығымен сипатталады. Егер формулаларды анықтайтын e және a оларда ғасырлық мүшелер болмаса, онда анықтамаға сәйкес эллипстік қозғалыс орбиталық орнықтылыққа ие болады. (9) теңдіктерінен төмендегідей қорытындылар шығады

$$a = \mathrm{const}, \quad e = \mathrm{const}, \tag{10}$$

яғни, айналмалы массивті сұйық шар өрісіндегі сынақ денесінің қозғалысының орбиталық орнықтылығы.

$\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторларының бағыттарына келетін болсақ, олар уақыт өте келе өзгереді. $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлары $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдықпен айналмалы қозғалысқа қатысады. Сонымен, сынақ денесінің айналмалы дене өрісіндегі қозғалысы, жалпы айтқанда, і еңкею бұрышына қатысты орнықты және көтерілетін түйіннің δ бойлығына және перигелийдің көтерілетін түйіннен σ бұрыштық қашықтығына қатысты орнықсыз болады.

Дегенмен, $\vec{M}$ векторлық элементке қатысты тұрақты орбиталар бар, яғни олар осы векторлық элементке қатысты орнықты (яғни кеңістіктегі орбитаның бағдарына қатысты). Оларды анықтау үшін (6) түрдегі шартты енгізу жеткілікті.

$$\left[\vec{\Omega}\vec{M}\right] = 0. \qquad (11)$$

сонда

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \quad \vec{M} = \text{const}. \qquad (12)$$

Орбиталардың өзі қандай болады? Бұл сұраққа жауап беру үшін $\vec{\Omega}$ мәнін (7) өрнектегі орнықтылық шартына (11) қоямыз, содан кейін қатынасты аламыз.

$$\left[\vec{M}\left\{2\vec{S}_0 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)}{7m_0M^2}\vec{S}_0\right\}\right] = 0. \qquad (13)$$

Бұл қатынас мынадай жағдайларда орындалады:

1. $\vec{M} = 0$, яғни орбита центрі арқылы өтетін түзу сызықтарға азғындағанда.
2. $\vec{S}_0 = 0$, осыдан есеп Шварцшильд есебіне айналады, яғни орталық симметриялы өрістегі сынақ денесінің қозғалысы есебіне . Бұл есеп үшін

$$\vec{M} = \text{const}, \ \vec{A} \neq \text{const}. \qquad (14)$$

Бұл есеп $\vec{M}$ векторлық элементке қатысты сынақ денесінің қозғалысының орнықтылығына алып келеді, бірақ жалпы айтқанда, $\vec{A}$ векторлық элементке қатысты орнықсыз болады. Кеплер есебі жағдайында екі векторлық элементке қатысты материалдық бөлшек қозғалысының орнықты болатынын еске түсірейік:

$$\vec{M} = \text{const}, \ \vec{A} = \text{const}. \qquad (15)$$

Осылайша, біз Кеплер есебі үшін $\vec{M} = \text{const}$, $\vec{A} = \text{const}$, Шварцшильд есебі үшін $\vec{M} = \text{const}$, $\vec{A} \neq \text{const}$ және Линз-Тирринг есебі үшін $\vec{M} \neq \text{const}$, $\vec{A} \neq \text{const}$, жалпы айтқанда, зерттеулер туралы осындай қорытындыға келдік.

Енді осы жағдайлардың Гамильтонда қалай көрінетінін білейік. Кеплер есебі үшін Гамильтон функциясы

$$H = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2}. \tag{16}$$

Бұл Гамильтонның $\vec{M}$ векторлық элементке де, $\vec{A}$ векторлық элементке де тәуелді емес, ол жүйенің M_0 инвариантына (немесе басқаша айтқанда, E энергиясына) тәуелді екенін ескерейік. Үлкен жартылай ось [3]

$$a = \frac{M_0^2}{m\alpha}, \tag{17}$$

Сонда (16) мына түрге келеді

$$H = mc^2 - \frac{\alpha^2}{2a} = mc^2 + E \tag{18}$$

Шварцшильд есебінің гамильтонианы

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{15m\alpha^4}{8M_0^2c^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3Mc^2}. \tag{19}$$

Бұл гамильтониан $\vec{M}$ векторлық элементінің абсолютті мәніне тәуелді. Егер бұл векторды жалпыланған импульс ретінде қарастырылса, онда сәйкес бұрыштық элемент g мына теңдеуді қанағаттандырады

$$\frac{d\vec{g}}{dt} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\vec{M}} = \vec{\Omega} = \frac{3m\alpha^4}{M_0^3M^3c^2}\vec{M}. \tag{20}$$

Осыдан кеплерлік элементтерге ауысатын болсақ

$$\vec{\Omega} = \frac{6\pi\gamma m_0}{Ta(1-e^2)c^2}\vec{e}_M, \tag{21}$$

мұндағы T – период, $\vec{e}_M$ - $\vec{M}$ вектор элементінің бағытындағы бірлік векторы. T периодында перигелий мынадай бұрыш арқылы айналады

$$\Delta g = \Omega \cdot T = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2}. \tag{22}$$

Сонымен, классикалық механикада Кеплер есебінде барлық орбиталар орнықты (векторлық элементтерге қатысты) және орнықтылық шарттары (15) теңдеуі болып табылады. Линза-Тирринг есебіндегі (15) шарттарды қанағаттандыратын орнықты орбиталар бар ма? Мұндай орбиталарды (6) табу үшін біз мынадай шарттарды талап етеміз

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = 0, \tag{23}$$

немесе

$$\left[\vec{\Omega}\vec{M}\right] = 0, \quad \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right] = 0. \tag{24}$$

Бұл векторлық элементтерге қатысты релятивистік орбиталардың тұрақтылығының шарттары. Олар мынадай шарттарда орындалады, егер

$$\vec{\Omega} \uparrow\uparrow \vec{M}, \quad A = 0, \tag{25}$$

немесе

$$\vec{\Omega} \uparrow\downarrow \vec{M}, \quad A = 0. \tag{26}$$

Сонымен, Линз-Тирринг есебінде $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлық элементтерге қатысты орнықты орбиталар орталық айналмалы дененің экваторлық жазықтығында жатқан шеңберлі орбиталар класы болып табылады.

Қорытындылай келе, орнықтылық шарты (15) тек ілгерілемелі қозғалыстың векторлық элементтерін есепке алатынын атап өтеміз. Біз бұл жағдайды қиындата аламыз. Шынында да, Кеплер мәселесі үшін, нақты айтқанда, келесі шарт бар

$$\vec{M} = \text{const}, \ \vec{A} = \text{const}, \ \vec{\omega} = 0, \tag{27}$$

$$\vec{M} = 0, \ \vec{A} = \text{const}, \ \vec{\omega} = 0. \tag{28}$$

мұндағы $\vec{\omega}-$ меншікті бұрыштық жылдамдық.

Сонда Шварцшильд мәселесі жағдайында бұл орнықтылық шартын тек радиалды бағытта жатқан түзу сызықтарға азғындайтын орбиталар ғана қанағаттандыра алады. (27) шарт пішінді қабылдайды

$$\vec{M} = 0,\ \vec{A} = \mathrm{const},\ \vec{\omega} = 0. \qquad (29)$$

Қолданылған әдебиет

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961.564 с.
2. Фок В.А. Атом водорода и неевклидова геометрия // Изв. АН СССР. ОТН. 1935. №2. С. 169-174.
3. Fock V. Zur Schrodingerishen Wellenmechanik // Ztschr. Phys. 1926. Bd. 38. S. 242-250.
4. Абдильдин М. М. Проблема движения тел в общей теории относительности // – Алматы: Изд-во «Қазақ университеті», 2006. – 132 с.